Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2017/2018**
M1 Théorie de Galois **Maria Chlouveraki**

Extensions de corps - TD 2

1. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$.

2. Soit E/F et $a, b \in E$. Montrer que $F(a, b) = F(a)(b) = F(b)(a)$.

3. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que K est une extension simple de F. Montrer que K est une extension simple de E. Est-ce que la réciproque est vraie ?

4. Soit E/F. Nous avons $[E : F] = 1 \Leftrightarrow E = F$.

5. Soient $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ des corps, avec $n \geq 3$. Montrer que

$$[F_n : F_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [F_{i+1} : F_i].$$

6. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que $[K : F] = p$, où p est un nombre premier. Dans ce cas, soit $K = E$ soit $E = F$. De plus, K est une extension simple de F.

7. Soit F un corps fini avec $|F| = q$, et soit E/F avec $[E : F] = n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que E est un corps fini avec $|E| = q^n$.

8. Si F est un corps fini, alors $|F| = p^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, où $p = \mathrm{car}F$.

9. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

10. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité, alors z est algébrique sur $\mathbb{Q}$.